COURS D'ANALYSE 2

Prof. OKOU Hypolithe

Table des matières

Chapitre 1

INTÉGRALES

1.1 Intégrale des fonctions en escalier

Définition 1.1.1. *On appelle subdivision d'un intervalle* $[a;b]$ *une suite croissante* $(x_0;x_1;...;x_n)$ *de nombres tels que* $x_0 = a$ *et* $x_n = b$.

Définition 1.1.2. *Soit une fonction réelle ou complexe définie dans un intervalle* $I = [a;b]$. *On dit que* f *est une fonction en escalier s'il existe une subdivision* $(x_0;x_1;...;x_n)$ *de* $[a;b]$ *telle que* f *prenne une valeur constante* c_i *dans chaque intervalle* $]x_i;x_{i+1}[$ *; les valeurs de* f *en* $x_0;x_1;...;x_n$ *pouvant être quelconques.*

Remarque 1.1.1. *La subdivision* $(x_0;x_1;...;x_n)$ *de* $[a;b]$ *n'est pas déterminer de façon unique par la connaissance de* f. *En effet*

1) si $c_i = c_{i+1} = f(x_{i+1})$, *on peut supprimer le point* x_{i+1} *de la subdivision.*

2) on peut partager arbitrairement chaque intervalle $[x_i;x_{i+1}]$ *en insérant de nouveaux points dans la subdivision*

Soient $f;g$ deux fonctions en escalier dans .

Soit $(x_0;x_1;...;x_n)$ une subdivision de $[a;b]$ telle que f soit constante dans chaque $]x_i;x_{i+1}[$.

Soit $(x'_0;x'_1;...;x'_n)$ une subdivision de $[a;b]$ telle que g soit constante dans chaque $]x'_i;x'_{i+1}[$.

La réunion des ensembles $\{x_0;x_1;...;x_n\}$ et $\{x'_0;x'_1;...;x'_n\}$ fournit une subdivision $\{x''_0;x''_1;...;x''_n\}$ de $[a;b]$ telle que f et g soient constant dans chaque intervalle $]x''_i;x''_{i+1}[$. Autrement dit, il existe une subdivision de $[a;b]$ adaptée à la fois à f et g. Ainsi :

Proposition 1.1.1. *Si* f *et* g *sont des fonctions en escalier,* $f+g$, $|f|$ *et* fg *sont des fonctions en escalier.*

Définition 1.1.3. *Soit* f *une fonction en escalier dans* I. *Soit* $(x_0;x_1;...;x_n)$ *une subdivision de* $[a;b]$ *telle que* f *ait une valeur constante dans chaque* $]x_i;x_{i+1}[$. *On appelle intégrale de* f *le nombre complexe (réel si* f *est réelle) :*

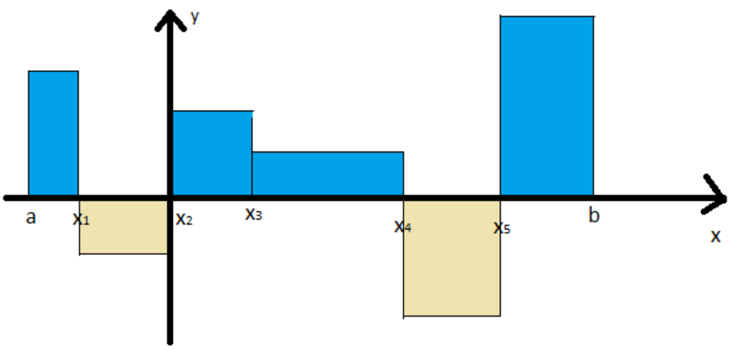
$$c_0(x_1 - x_0) + c_1(x_2 - x_1) + ... + c_{n-1}(x_n - x_{n-1}). \tag{1.1}$$

Ce nombre se note $\int\limits_a^b f(x)dx$

Comme la subdivision $(x_0;x_1;...;x_n)$ n'est pas déterminée de manière unique par f, il sera indispensable de montrer que l'intégrale de f ne dépend que de f et non pas de la subdivision choisie.

1.1.1 Interprétation géométrique

Chaque terme $c_i(x_{i+1} - x_i)$ repprésente l'aire d'un rectangle de côtés $x_{i+1} - x_i$ et $|c_i|$, comptée positivement si $c_i \geq 0$, négativement si $c_i < 0$. L'expression 1.1 représente l'aire coloriée dans la figure suivante étant entendu qu'on compte positivement les aires des rectangles situés au dessus de Ox, négativement less aires des rectangles situés au-dessous de Ox.



Cette illustration rend intuitivement évident le fait que le nombre donné dans 1.1 ne dépend que de f.

Analytiquement considérons une autre subdivision $(y_0; y_1; ...; y_n)$ de l'intervalle $[a; b]$ telle que f ait une valeur constante d_i dans chaque $]y_i; y_{i+1}[$. Montrons alors que la valeur de 1.1 est

$$d_0(y_1 - y_0) + d_1(y_2 - y_1) + ... + d_{n-1}(y_n - y_{n-1}). \tag{1.2}$$

Or, il existe une subdivision de $[a; b]$ qui comporte à la fois les nombres x_i et les nombres y_i. Pour cela, il suffit de réorganiser en ordonnant par ordre croissant et renommant la suite de nombres $(y_0; y_1; ...; y_n, x_0; x_1; ...; x_n)$, on obtient une nouvelle subdivision qui à une valeur de l'intégrale $\int\limits_a^b f(x)dx$. On est alors ramené au cas où $(y_0; y_1; ...; y_n)$ s'obtient en ajoutant de nouveaux points à la subdivision $(x_0; x_1; ...; x_n)$. En procédant par étapes, on peut même supposer qu'on a ajouté un seul nouveau point $u \in]x_i; x_{i+1}[$. Donc le nombre 1.2 s'écrit :

$$c_0(x_1 - x_0) + c_1(x_2 - x_1) + ... + c_i(x_i - u) + c_i(x_{i+1} - u) + c_{i+1}(x_{i+2} - x_{i+1}) + ... + c_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$

qui n'est rien d'autre que la valeur de l'intégrale donnée sous forme de 1.1.

Remarque 1.1.2. *la lettre x qui figure dans la notation $\int\limits_a^b f(x)dx$ est variable muette dont ne dépend la valeur de l'intégrale. Autrement dit :*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(u)du = ...$$

Proposition 1.1.2. *Soient f et g deux fonctions en escalier dans I et λ une constante (réelle ou complexe). On a :*

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Preuve 1. *Soit $(x_0; x_1; ...; x_n)$ une subdivision de $[a; b]$ telle que f et g à la fois soient constantes dans chaque $]x_i; x_{i+1}[$. Posons $f(x) = c_i$ et $g(x) = d_i$ pour tout $x \in]x_i; x_{i+1}[$. Alors $f(x) + g(x) = c_i + d_i$ dans $]x_i; x_{i+1}[$. On a donc*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} c_i(x_{i+1} - x_i)$$
$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} d_i(x_{i+1} - x_i)$$
$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \sum_{i=1}^{n-1} (c_i + d_i)(x_{i+1} - x_i) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i(x_{i+1} - x_i)\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i(x_{i+1} - x_i)\right)$$

Donc

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Proposition 1.1.3. *Soit f une fonction en escalier dans $I = [a; b]$ On a*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Preuve 2. *En adoptant les mêmes notations que ci-dessus, on a :*

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n-1} c_i(x_{i+1} - x_i)\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |c_i|(x_{i+1} - x_i) = \int_a^b |f(x)|dx. \end{aligned}$$

Propriété 1.1.1. *Soioent f, g des fonctions en escalier réelles sur I, si $f \leq g$, alors on a*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Preuve 3. *Avec les notations précédentes, on a $c_i \leq d_i$ pour tout i.*

1.2 Intégrale de fonctions continues

Théorème 1.2.1. *Soit f une fonction réelle ou complexe continue dans $[a; b]$.*

(i) *Il existe une suite de fonctions en escalier dans $[a; b]$ qui tend uniformément vers f sur $[a; b]$.*

(ii) *Si $(g_1; g_2; ...)$ est une suite de fonctions en escalier dans $[a; b]$ qui tend uniformément vers f sur $[a; b]$, les nombres $\int_a^b g_n(x)dx$ ont une limite finie.*

(iii) *Cette limite ne dépend que de f et non pas de la suite $(g_n)_n$.*

Preuve 4. *(i)* *Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue dans $[a; b]$, il existe un nombre γ_i tel que $x; x' \in [a; b]$ et $|x - x'| \leq \gamma_i \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$.*

Soit alors $(x_0; x_1; ...; x_n)$ une subdivision de $[a; b]$ telle que $|x - x'| \leq \gamma_i$ pour tout i. Soit φ la fonction qui, pour tout i, est égale à $f(x_i)$ dans $[x_i; x_{i+1}[$, et est égale à $f(b)$ en b. C'est une fonction en escalier dans $[a; b]$. D'autre part, on a $|f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$ pour tout x de $[a; b]$. C'est évident si $x = b$, si $x < b$, on a $x \in [x_i; x_{i+1}[$ pour un certain i, et alors $|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(x_i)| \leq \varepsilon$, puisque $|x - x_i| \leq x_{i+1} - x_i| \leq \gamma_i$.

Appliquant ce qui précède successivement pour $\varepsilon = 1$; $\varepsilon = \frac{1}{2}$; $\varepsilon = \frac{1}{3}$; ...on obtient des fonctions en escaliers que nous notons $f_1; f_2; f_3; ...$ La suite $(f_1; f_2; f_3; ...)$ tend vers f sur $[a; b]$.

(ii) *Soit $(g_1; g_2; g_3; ...)$ une suite de fonctions en escalier dans $[a; b]$ qui tend uniformément vers f. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que $n \geq N \Longrightarrow |g_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [a; b]$. Or, d'après 1.1.1 ; 1.1.2 et 1.1.3, on a pour tout $n, n' \geq N$, :*

$$\left| \int_a^b g_n(x)dx - \int_a^b g_{n'}(x)dx \right| = \left| \int_a^b (g_n(x) - g_{n'}(x))dx \right| \leq \int_a^b |g_n(x) - g_{n'}(x)|dx;$$

donc, $\forall n, n' \geq N \Longrightarrow \left| \int_a^b g_n(x)dx - \int_a^b g_{n'}(x)dx \right| \leq \int_a^b 2\varepsilon dx = 2\varepsilon(b-a)$. Ce qui montre bien que la suite $\left(\int_a^b g_n(x)dx \right)_n$ est une suite de Cauchy ; Ainsi elle converge vers une limite finie quand $n \longrightarrow +\infty$.

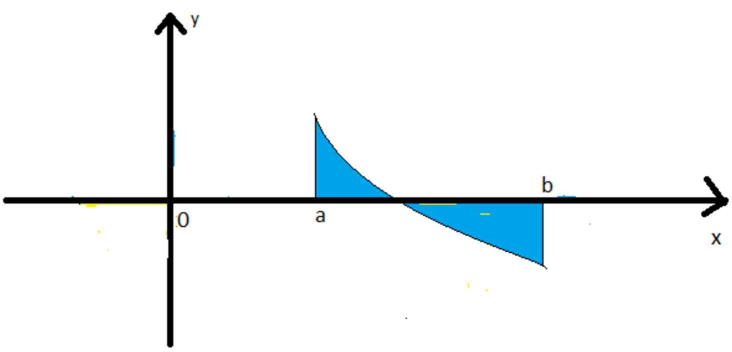
(iii) *Soit $(h_n)_n$ une autre suite de fonction en escalier dans $[a; b]$ qui tend uniformément vers f. Alors il est clair que la suite $(g_1; h_1; g_2; h_2; g_3; h_3; ...)$ tend uniformément vers f. Donc la suite de nombres $\int_a^b g_1(x)dx$, $\int_a^b h_1(x)dx$, $\int_a^b g_2(x)dx$, $\int_a^b h_2(x)dx$, ... a une limite finie l. Toute suite partielle tend alors vers l. Ce qui prouve que $\int_a^b g_n(x)dx$ et $\int_a^b h_n(x)dx$ tendent vers une même limite.*

Définition 1.2.1. *La limite considérée dans le théorème 1.2.1, limite qui ne dépend que de f, s'appelle l'intégrale de f et se note*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

1.2.1 Interprétation géométrique

Quand les fonctions en escalier g_n, tendent uniformément vers f, le graphe Γ_n de g_n tend vers le graphe Γ de f. D'après l'interprétation géométrique signalée plus haut de $\int_a^b g_n(x)dx$, on voit à la limite que $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire coloriée dnans la figure 2 ci-après, étant entendu qu'on compte positivement les aires situées au-dessus de Ox, négativement les aires situées au-dessous. Bien entendu, nous n'utiliserons pas dans la suite cette intuitive d'aire. au contraire, les considérations qui précède pourraient permettre de définir rigoureusement les aires en question.



1.2.2 Généralisation

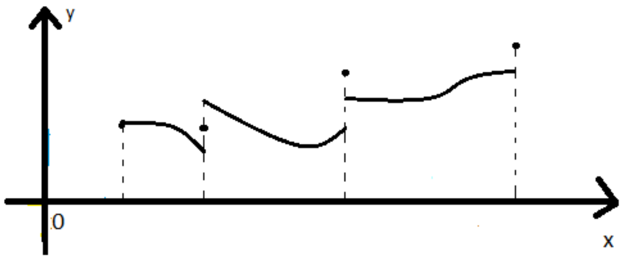
Considérons à présent des fonction un plus générales.

Définition 1.2.2. *On dit qu'une fonction réelle ou complexe f définie dans $[a;b]$ est continue par morceaux s'il existe $(x_0;x_1;...;x_n)$ une subdivision de $[a;b]$ possédant la propriété suivante :*

pour tout i, la fonction f est continue dans $]x_i;x_{i+1}[$, admet en $x_i$une limite à droite finie et admet en x_{i+1} une limite à gauche finie.

Ainsi, les fonctions continues et les fonctions en escalier sont continues par morceaux.

Toute opération usuelle sur les fonctions continues par morceaux, conduit à une fonction continue par morceaux.



Proposition 1.2.1. *Le théorème 1.2.1, reste valable pour une fonction f continue par morceaux.*

Preuve 5. *Soit $(x_0;x_1;...;x_n)$ une subdivision de $[a;b]$ avec la propriété f continue dans $]x_i;x_{i+1}[$. Supposons qu'on sache construire :*

1. *une suite $(l_1;l_2;...)$ de fonctions en escalier dans $[x_0;x_1]$ tendant uniformément vers f dans $[x_0;x_1]$*
2. *une suite $(l'_1;l'_2;...)$ de fonctions en escalier dans $[x_1;x_2]$ tendant uniformément vers f dans $[x_1;x_2]$*
3. *une suite $(l''_1;l''_2;...)$ de fonctions en escalier dans $[x_2;x_3]$ tendant uniformément vers f dans $[x_2;x_3]$; etc.*

Si on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} l_n(x) & si \quad x \in]x_0;x_1[\\ l'_n(x) & si \quad x \in]x_1;x_2[\\ l''(x) & si \quad x \in]x_2;x_3[\\ .... \quad .... & .... \\ f(x_i) & \forall i = 0;1;2;...;n. \end{cases}$$

Ainsi la suite $(f_n)_n$ est une suite de fonctions en escalier dans $[a;b]$ qui converge uniformément vers f dans $[a;b]$.

Pour prouver (i) on est donc ramené au cas où f est continue dans $]a;b[$ admet en a une limite à droite finie λ et en b une limite à gauche finie μ ; mais alors soit φ la fonction définie par

$$\begin{cases} \varphi(x) = f(x) \quad si \quad x \in]a;b[\\ \varphi(a) = \lambda \\ \varphi(b) = \mu \end{cases}$$

La fonction φ est continue, donc il existe une suite de fonctions en escalier tendant uniformément vers φ dans $[a;b]$ et à foritori tendant uniformément vers f dans $]a;b[$.

Une fois la propriété (i) du théorème 1.2.1 est démontré pour les fonctions continues par morceaux, il n'y a à changer à la démonstration des (ii) et (iii) du même théorème dans le cas de fonctions continues par morceaux.

Remarque 1.2.1. *Si f est une fonction en escalier (donc continue par morceaux), ce qui précède définit pour f la même intégrale que dans la définition 1.1.3. Il suffit de considérer f comme limite uniforme de la suite $(f;f;f;....)$.*

1.3 Propriétés de l'intégrale

Propriété 1.3.1.

1. *Comme en 1.1.1, on a :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ...$$

2. *Si f est continue par morceaux dans $[a;b]$, et si $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :*

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

Propriété 1.3.2. *Si f et g sont continues par morceaux dans $[a;b]$, on a :*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Preuve 6. *Il est clair qu'il existe une suite $(f_1; f_2; f_3; ...)$ de fonctions en escalier dans $[a;b]$ qui tend uniformément vers f, et une suite $(g_1; g_2; ...)$ de fonctions en escalier dans $[a;b]$ qui tend uniformément vers g. Alors $(f_1+g_1; f_2+g_2; ...)$ de fonction en escalier tend uniformément vers $f+g$; on a :*

$$\int_a^b f_n(x)dx \longrightarrow \int_a^b f(x)dx$$
$$\int_a^b g_n(x)dx \longrightarrow \int_a^b g(x)dx$$
$$\int_a^b (f_n(x)+g_n(x))dx \longrightarrow \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Or

$$\int_a^b (f_n(x)+g_n(x))dx = \int_a^b f_n(x)dx + \int_a^b g_n(x)dx$$

donc par passage à la limite dans cette égalité, on obtient la propriété cherchée

Propriété 1.3.3. *Si f est continue par morceaux dans $[a;b]$, on a :*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Propriété 1.3.4. *Si f et g sont continues par morceaux dans $[a;b]$, et si $f \leq g$, on a :*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Preuve 7. *Soit la fonction positive $h = g - f$. Il suffit alors de montrer que l'intégrale de h est positive. Soit $(h_1; h_2; ...)$ une suite de fonctions en escalier tendant uniformément vers h. Alors la suite $(|h_1|; |h_2|; ...)$ tend uniformément vers $|h| = h$; or, les $|h_n|$ sont des fonctions en escalier positives, donc leurs intégrales sont aussi positives. D'où*

$$\int_a^b h(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b |h_n(x)|dx \geq 0.$$

Corollaire 1.3.1. *Soit f une fonction continue par morceaux dans $[a;b]$. Alors*

1. si $|f(x)| \leq M$ dans $[a;b]$, on a :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a).$$

2. si $m \leq f(x) \leq M$ dans $[a;b]$, on a :

$$m(b-a) \leq \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a).$$

Théorème 1.3.1. ***(Théorème de la moyenne)*** *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et soit $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable de signe constant. Alors $\exists c \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.*

En particulier si $g = 1$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Le nombre $f(c)$ est appelé valeur moyenne de f dans $[a;b]$.

Théorème 1.3.2. *Soit f une fonction complexe définie et continue dans un intervalle $[a;b]$, où $a > b$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty}\left(\frac{b-a}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(a+\frac{k}{n}(b-a))\right) = \int_a^b f(x)dx.$$

Remarque 1.3.1. *Ce résultat n'est valable que dans le cas où f est continue dans $[a;b]$.*

Définition 1.3.1. *Soient f une fonction continue par morceaux dans $[a;b]$, $f = f_1 + if_2$, sa décomposition en partie réelle et imaginaire. on a alors en raison des propriétés 1.3.1 et 1.3.2,*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + i\int_a^b f_2(x)dx.$$

Ensuite, il suffit de savoir calculer les intégrales de fonctions réelles.

Proposition 1.3.1. *Si deux fonctions continues par morceaux f, g dans $[a;b]$ diffèrent seulement en un nombre fini de points, on a :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Preuve 8. *Posons $g = f + h$ où h est nulle sauf en un nombre fini de points. D'après la propriété 1.3.2, il suffit de prouver que $\displaystyle\int_a^b h(x)dx = 0$. Or h est une fonction en escalier et la propriété voulue résulte de la définition de l'intégrale des fonctions en escalier.*

Remarque 1.3.2. *En général*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \left[\int_a^b f(x)dx\right]\left[\int_a^b g(x)dx\right].$$

1.4 Propriétés relative à l'intervalle d'intégration

Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux dans $[a;c]$. Soit $b \in [a;c]$. Alors f est évidemment continue par morceaux dans $[a,b]$ et dans $[b;c]$.

Théorème 1.4.1. ***(Règle de Chasles)***
On a :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Preuve 9. *Soit $(g_1; g_2; ...)$ une suite de fonctions en escalier dans $[a;b]$ tendant uniformément vers f dans $[a;b]$. Soit $(h_1; h_2; ...)$ une suite de fonctions en escalier dans $[b;c]$ tendant uniformément vers f dans $[b;c]$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} g_n(x) & si \quad x \in [a;b] \\ h_n(x) & si \quad x \in [b;c] \end{cases}$$

Alors f_n est une fonction en escalier et la suite $(f_n)_n$ tend vers f uniformément dans $[a;c]$. On a

$$\int_a^b g_n(x)dx \longrightarrow \int_a^b f(x)dx$$
$$\int_b^c h_n(x)dx \longrightarrow \int_b^c f(x)dx$$
$$\int_a^c f_n(x)dx \longrightarrow \int_a^c f(x)dx.$$

Or, sur la définition de l'intégrale des fonctions en escalier, il est clair que

$$\int_a^c f_n(x)dx = \int_a^b g_n(x)dx + \int_b^c h_n(x)dx$$

donc par passage à la limite dans cette égalité, on obtient la propriété cherchée

Définition 1.4.1. *Jusqu'ici le symbole $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ n'a été défini que si $a \leq b$.*

- Si $a \geq b$, on pose par définition :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

- Si $a = b$, les deux définition sont bien cohérentes, car on remarque que $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$.

1.5 Primitives

Définition 1.5.1. *Soit f une fonction réelle ou complexe définie dans un intervalle I. On appelle primitive de f toute fonction F réelle ou complexe définie dans I telle que $F' = f$.*

Ainsi la fonction F n'est connue que par sa dérivée. Le problème essentiel, très dffcile à résoudre dans le cas général, consiste à trouver F connaissant la dérivée F'.

Exemple 1.5.1.

1. Soit f la fonction nulle : $f(x) = 0$ pour tout x. Alors F est une fonction dont la dérivée est nulle. C'est donc une fonction constante. Ainsi toute fonction F donnée par $F(x) = a$ est une primitive de $f(x) = 0$. On voit donc sur cet exemple qu'il existe une infinité de primitives.

2. Soit f la fonction $f(x) = x$. Alors F vérifie $F'(x) = x$. On peut donc prendre $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$. Mais toute fonction $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + a$ avec $a \in \mathbb{R}$ convient aussi.

Proposition 1.5.1. *Si f admet une primitive F, alors toute autre primitive de f est du type $G(x) = F(x) + constante$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Preuve 10. *Si F et G sont deux primitives de f, alors $F'(x) = G'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi $F'(x) - G'(x) = (F - G)'(x) = 0$. La fonction $F - G$ est de dérivée nulle, elle est donc constante.*

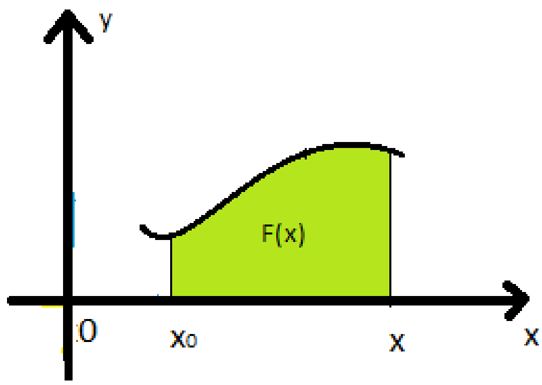
Théorème 1.5.1. *Toute fonction continue rélle ou complexe $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une primitive.*

Nous admettrons ce théorème. Rappelons que toutes les fonctions classiques, les polynômes, la fonction e^x, les fonctions $\sin(x), \cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction $\ln(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$, les fractions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition.

Théorème 1.5.2. *Soit f une fonction rélle ou complex continue dans un intervalle$I$. Soit x_0 un point de I. Alors la fonction*

$$x \longmapsto F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt,$$

qui est définie dans I, est une primitive de f qui s'annule en x_0.



Preuve 11. *Supposons que f est réelle. Soient x et $x + h$ deux points de I. On a :*

$$F(x+h) - F(x) = \int_{x_0}^{x+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x}^{x+h} f(t)dt = hf(c)$$

où c est compris entre x et $x + h$. Si $h \neq 0$ on peut écrire : $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c)$.

Fixons x. Quand h tend vers 0 par valeurs différentes, c tend vers x, donc $f(c)$ tend vers $f(x)$. on voit donc que F est dérivable et que $F'(x) = f(x)$. D'où le théorème.

Théorème 1.5.3. *Soient f une fonction réelle ou complexe continue dans un intervalle I, F une primitive de f. Si $a \in I$ et $b \in I$, on a :*

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Preuve 12. *Posons $G(x) = \displaystyle\int_{a}^{x} f(t)dt$.*

D'après le théorème 1.5.2 , G est une primitive de f qui s'annule en a. Or la fonction $x \longmapsto F(x) - F(a)$ est aussi une primitive de f nulle en a. Donc $G(x) = F(x) - F(a)$ pour tout x dans I. Par passage à la limite quand x tend vers b, obtient la formule recherchée.

Notations 1.5.1.

1. *On pose souvent : $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$*

2. *La fonction* $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ *peut aussi s'écrire* $x \longmapsto \int_a^x f(x)dx$*, malgré le danger de confusion que cette notation présente. Quel que soit* a*, cette fonction est une primitive de* f*. C'est cette raison que l'on désigne par le symbole* $\int f(x)dx$ *une primitive de* f*. Ainsi, une primitive s'appelle intégrale indéfinie de* f*, par opposition à* $\int_a^b f(x)dx$ *qui est une intégrale définie de* f*.*

Remarque 1.5.1. *On prendra garde que le symbole* $\int_a^b f(x)dx$ *représente un nombre, tandis que le symbole* $\int f(x)dx$ *représente une fonction (et même une infinité de fonctions)*

L'ensemble des primitives de f est donc de la forme $\{F(x) + C/C \in \mathbb{R}\}$, on le note $\int f(x)dx$.

Exemple 1.5.2.

1. *Déterminer* $\int x^2dx$*. Une primitive de* x^2 *est* $\frac{x^3}{3}$*. Ainsi* $\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C$*.*
2. *Déterminer* $\int \sin(x)dx$*. Une primitive de* $\sin(x)$ *est* $-\cos(x)$*.*

   Ainsi $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$*.*

1.6 Linéarité de l'intégrale

Théorème 1.6.1. *Soient* f *et* g *deux fonctions admettant des primitives (par exemple continues). On a alors*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

pout tout $\alpha; \beta \in \mathbb{R}$

Preuve 13. *Soit* F *une primitive de* f *et soit* G *une primitive de* g*. Alors* $(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$*. La proposition se déduit de la formule fondamentale.*

Cette propriété permet d'intégrer tous les polynômes.

Exemple 1.6.1.

1. *Calcul de* $\int (x^3 + 3x^2 + 2x + 3)dx$*. On a*

$$\begin{aligned}
\int (x^3 + 3x^2 + 2x + 3)dx &= \int x^3dx + \int 3x^2dx + \int 2xdx + \int 3dx \\
&= \int x^3dx + 3\int x^2dx + 2\int xdx + 3\int dx \\
&= \frac{x^4}{4} + x^3 + x^2 + 3x + C
\end{aligned}$$

2. Calcul de Z (sin x + cos x)dx : On a Z (sin xdx + cos x)dx = R sin xdx + R cos xdx = cos x + sin x + C :

1.6.1 Intégration par parties

Proposition 1.6.1.
Soient f et g deux fonctions réelles ou complexes continûment dérivables dans un intervalle I. On a :

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Si $a \in I$ et $b \in I$, on a :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Preuve 14. *On a $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$. On en déduit $\int (f(x)g(x))'dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$. D'après la formule fondamentale $f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$ d'où la proposition.*

Exemple 1.6.2.

1. *Calcul de $\int xe^x dx$. Posons $f(x) = x$; $g'(x) = e^x$. Alors $f'(x) = 1$; $g(x) = e^x$ (on choisit comme primitive de $g'(x)$ la fonction $g(x)$). On en déduit*

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= xe^x - \int 1e^x dx \\ &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C. \end{aligned}$$

2. *Calcul de $\int x\sin(x)dx$. Posons $f(x) = x; g'(x) = \sin(x)$. Alors $f'(x) = 1; g(x) = \cos(x)$. On en déduit*

$$\begin{aligned} \int x\sin(x)dx &= -x\cos(x) - \int 1(-\cos(x))dx \\ &= -xcosx + \int \cos(x)dx \\ &= -x\cos(x) + \sin(x) + C \end{aligned}$$

3. *Calcul de $\int x^2e^x dx$. Posons $f(x) = x^2$; $g'(x) = e^x$. Alors $f'(x) = 2x$; $g(x) = e^x$. On en déduit*

$$\begin{aligned} \int x^2e^x dx &= x^2e^x - \int 2xe^x dx \\ &= x^2e^x - 2\int xe^x dx. \end{aligned}$$

Il est nécessaire de faire encore une intégration par parties pour calculer la dernière intégrale. Ceci a été fait dans le premier exemple. On a $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C_1$. D'où

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C_1$$

où C_1 est une constante.

Remarque 1.6.1. *Il faut faire très attention aux choix des fonctions f et g dans l'intégration par parties. Reprenons le premier exemple : $\int xe^x dx$ Posons cette fois $f(x) = e^x$; $g'(x) = x$. Alors $f'(x) = e^x$; $g(x) = \frac{x^2}{2}$. On en déduit $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx$. Dans ce cas, la deuxième intégrale $\int \frac{x^2}{2}e^x dx$ est "plus compliquée" que celle que nous comptions calculer. On a donc rien gagné en appliquant ainsi la formule d'intégration par parties.*

1.7 Changement de variable

Soient I et J deux intervalles, φ une fonction continûment dérivable dans J, avec $\varphi(J) \subset I$. Soient f une fonction réelle ou complexe continue dans I, F une primitive de f dans I. Alors

$f \circ \varphi$ et $F \circ \varphi$ sont des fonctions continues dans J. La fonction $F \circ \varphi$ est même continûment dérivable, de dérivée :

$$(F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi'.$$

Ainsi, $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi)\varphi'$.

Théorème 1.7.1. *Les primitives* $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ *(définies sur J) se déduisent des prmitives* $\int f(x)dx$ *(définies sur I) en composant avec φ.*

Ainsi, si $\alpha, \beta \in J$ avec $a = \varphi(\alpha)$ et $a = \varphi(\beta)$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) = F(b) - F(a).$$

Remarque 1.7.1. *Malgré les apparences, la primitive* $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ *peut être plus facile à calculer que* $\int f(x)dx$. *Si l'on a réussi à calculer* $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ *sur J, on en déduira la valeur de* $\int f(x)dx$ *sur $\varphi(J)$. En particulier, si φ est une application bijective de J sur I,* $\int f(x)dx$ *se déduira de* $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ *en composant avec φ^{-1}.*

Preuve 15. *Ceci provient de la formule donnant la dérivée d'une fonction composée.*

Exemple 1.7.1.

1. *Calcul de* $\int \frac{1}{x-2}dx$. *Posons $t = x-2$. On a donc dans ce cas $x(t) = t+2$. Alors $dx = (t+2)'dt$ et la formule de changement de variable donne* $\int \frac{1}{x-2}dx = \int \frac{1}{t}1dt = \ln|t| + C$. *D'où* $\int \frac{1}{x-2}dx = \ln|t| + C = \ln|x-2| + C$.
2. *Calcul de* $\int \sqrt{1-x^2}dx$. *La fonction $\sqrt{1-x^2}$ est définie pour $x \in [1;1]$. Posons $x(t) = \cos(t)$. On a donc dans ce cas $x'(t) = \sin(t)$ et $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2(t)} = \sqrt{\sin^2(t)}$. Si $t \in [0;\pi]$, alors $x \in [1;1]$ et $\sin(t) \geq 0$. D'où $\sqrt{\sin^2(t)} = |\sin(t)| = \sin(t)$. Ainsi* $\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sin(t)(\sin(t))dt = \int \sin^2(t)dt$. *Nous verrons dans le chapitre suivant comment intégrer des polynômes trigonométriques. On a* $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(t)}{2}$.
   Ainsi $\int \sin^2(t)dt = \int \frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{2} + C$. *Comme $x(t) = \cos(t)$, alors $t = \arccos(x)$. Ainsi* $\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\arccos(x)}{2} + \frac{\sin(2(\arccos(x)))}{2} + C$.

Exemple 1.7.2.

1. *On considère la fonction* $x \longmapsto \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ *qui est continue dans $I = \mathbb{R}$. On demande de calculer* $F(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

Faisons le changement de variable $x = \tan(t)$. *Plus précisement, considérons la fonction* $t \longmapsto \tan(t)$, *qui est continûment dérivable dans* $J = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
Ainsi, cet changement de variable transforme la fonction F *en la fonction* G *sur* J *donnée par :*

$$G(t) = \int \frac{1}{(1+\tan^2(t))\sqrt{1+\tan^2(t)}}(1+\tan^2(t))dt.$$

On a $1+\tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$; *comme* $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ *alors* $\sqrt{1=\tan^2(t)} = \frac{1}{\cos(t)}$. *Donc* $G(t) = \int \cos(t)dt = \sin(t)+\lambda$, *où* λ *désigne une constante quelconque. On en déduit* F, *car* $t \longmapsto \tan(t)$ *est une application bijective de* J *sur* $\mathbb{R}$; *l'application réciproque est* $x \longmapsto \arctan(x)$, *donc*

$$F(x) = \sin(\arctan(x)) + \lambda.$$

On peut donner une expression plus agréable de F, *en effet, on a* $\cos(t) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, *d'où* $\sin(t) = \tan(t)\cos(t) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. *Donc* $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \lambda$.

2. *Soit à calculer* $G(x) = \int \sin^3(x)\cos(x)dx$. *Faisons le changement de variable* $t = \sin(x)$; *la dérivée est* $\frac{dt}{dx} = \cos(x)$. *On voit que* G *se déduira par ce changement de variable de* $F(t) = \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + \lambda$.
Donc
$\int \sin^3(x)\cos(x)dx = \frac{1}{4}\sin^4(x) + \lambda.$

Proposition 1.7.1. *Soit* f *une focntion réelle ou complexe définie sur* $\mathbb{R}$, *de période* T, *continue par morceaux sur tout intervalle borné. Alors l'intégrale de* f *est la même sur tout intervalle de longueur* T *:*

1.8 Somme de DARBOUX

Définition 1.8.1. *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction bornée et* $s = (x_0; x_1 ...; x_n)$ *une subdivision de* $[a,b]$. *Pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$, *on pose*

$$m_i = \inf_{t \in [x_{i-1}, x_i]} f(t)$$

et

$$M_i = \sup_{t \in [x_{i-1}, x_i]} f(t).$$

Les réels

$$d(f,s) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i$$

et

$$D(f,s) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i$$

sont appelés sommes de Darboux inférieure et supérieure de f *pour la subdivision* s.

Ces sommes ont été introduites par Gaston Darboux pour donner un critère pour qu'une fonction soit Riemann-intégrable. Posons en effet

$$\begin{cases} d(f) = sup\{d(f,s)/s \text{ subdivision de } [a,b]\} \\ D(f) = inf\{D(f,s)/s \text{ subdivision de } [a,b]\}. \end{cases}$$

Alors une fonction réelle bornée f sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable si et seulement si

$$d(f) = D(f).$$

Dans ce cas, le réel commun est aussi l'intégrale de f sur $[a, b]$.

Théorème 1.8.1. *Toute fonction continue est Riemann-Intégrable*